

MATEMÁTICA 2 - Verano 2020

Práctica 1 - Repaso de matrices y de sistemas de ecuaciones lineales

(En todas las prácticas, $K = \mathbb{R}$ (los números reales) o \mathbb{C} (los números complejos))

Ejercicio 1. Cuando sea posible, calcular $A + 2B$, $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

$$\begin{array}{ll}
 1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & 3. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, & 4. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

Ejercicio 2. Exhibir matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \neq 0$, tales que $A^2 = -\text{Id}$ y $B^2 = 0$.

Ejercicio 3. Sean A, B y $C \in K^{n \times n}$ con $n = 2$. Mostrar un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones (que son por lo tanto todas falsas):

1. $(AB)^2 = A^2B^2$,
2. $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$,
3. $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$,
4. $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$,
5. $A^j = 0$ para algún $j \geq 2 \Rightarrow A = 0$,
6. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Ejercicio 4. Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B , AB tiene una fila de ceros? (siempre que AB esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

Ejercicio 5. Probar que si $A, B \in K^{n \times n}$ satisfacen que $Ax = Bx, \forall x \in K^n$, entonces $A = B$.

Ejercicio 6. Sea $A \in K^{n \times n}$ una matriz inversible y sean $B, C \in K^{n \times m}$. Probar:

1. $AB = AC \Rightarrow B = C$
2. $AB = 0 \Rightarrow B = 0$.

Ejercicio 7. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa para matrices $A, B \in K^{n \times n}$. Justificar:

1. A, B inversibles $\Rightarrow A + B$ inversible,
2. A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

Ejercicio 8. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sobre \mathbb{R} , y los sistemas homogéneos asociados. ¿Cambia algo si se resuelven sobre \mathbb{C} ?

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 1 \end{cases} & 2. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 4 \end{cases}
 \end{array}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Verificar que en cada caso, el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es igual a una solución particular más el conjunto de soluciones del homogéneo asociado.

Ejercicio 9. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$.

Ejercicio 10. Resolver sobre \mathbb{C} el sistema

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 11. Determinar los valores de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \beta \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \gamma \end{cases}$$

Ejercicio 12. Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ cada uno de los sistemas siguientes tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones. En el caso de los sistemas homogéneos, si la solución es única, ¿cuál es?

$$1. \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ (a+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (a^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$$

Ejercicio 13. Decidir si (o cuándo) las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad 5. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4. \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 6. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$